

3.1 | 연습문제 정답

01. f 는 모든 실수에서 연속이다.
 f 는 모든 실수에서 미분가능하다.
02. f 는 모든 실수에서 연속이다.
 f 는 $x \neq 0$ 모든 실수에서 미분가능하다.
03. f 는 $x \neq 0$ 인 모든 실수에서 미분가능하다.
04. f 는 $x \neq 0$ 인 모든 실수에서 미분가능하다.
05. f 는 모든 실수에서 미분가능하다.
06. f 는 $x \neq 0$ 인 모든 실수에서 미분가능하다.
07. f 는 $x \neq \pm 1$ 인 모든 실수에서 연속이고 $x \neq \pm 1$ 인 모든 실수에서 미분가능하다.
08. $x = 1$ 에서 미분계수는 존재하지 않는다.
09. $f'(0)$ 은 존재하지 않는다.

10.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h)^2 - \sin(x^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(x+h)^2 - \sin(x^2)}{(x+h)^2 - x^2} \right] \left[\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \right]$$

이다.

$$\begin{aligned} \sin(x+h)^2 - \sin(x^2) &= \sin(x^2 + 2xh + h^2) - \sin(x^2) \\ &= \sin(x^2)\cos(2xh + h^2) + \cos(x^2)\sin(2xh + h^2) - \sin(x^2) \end{aligned}$$

$$= \sin(x^2)[\cos(2xh + h^2) - 1] + \cos(x^2)\sin(2xh + h^2)$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(x+h)^2 - \sin(x^2)}{(x+h)^2 - x^2} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)[\cos(2xh + h^2) - 1]}{2xh + h^2} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2)\sin(2xh + h^2)}{2xh + h^2} \\ &= \sin(x^2) \cdot 0 + \cos(x^2) \cdot 1 = \cos(x^2) \text{이고 } \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \right] = 2x \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(x+h)^2 - \sin(x^2)}{(x+h)^2 - x^2} \right] \left[\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(x+h)^2 - \sin(x^2)}{(x+h)^2 - x^2} \right] \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \right] = 2x \cos(x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x+h)^2} - \sqrt{x^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h(\sqrt{(x+h)^2} + \sqrt{x^2})} = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x\sqrt{x^2}}{x^2} = \frac{|x|}{x} \end{aligned}$$

$$12. (\text{연속성}) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + 1) = 1 \text{이고 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \text{이므로}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ 이다. 또한 $f(0) = 3(0) + 1 = 1$ 이므로 f 는 $x = 0$ 에서 연속이다.

(미분가능성)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3h + 1 - 1}{h} = 3 \text{이고} \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 - 1}{h} = 0 \text{이므로 } f \text{는 } x = 0 \text{에서 미분불가능하다.} \end{aligned}$$

$$13. f(a) > 0 \text{이고 } f'(a) \text{가 존재하고 } \lim_{h \rightarrow 0} (1 + ah)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[(1 + ah)^{\frac{1}{ah}} \right]^a = e^a \text{이}$$

므로

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{h}} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(a+h) - f(a)}{f(a)} \right]^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \frac{h}{f(a)} \right]^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f'(a)}{f(a)} h \right]^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}\end{aligned}$$

14. $2f'(a)$

15. $f(x) = |x|$